Correction de l'épreuve de physique I filière TSI

Concours CNC session 2012

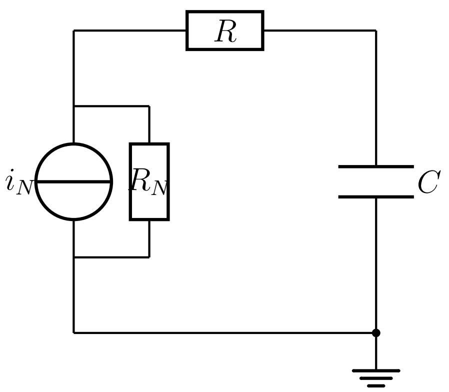
EL FILALI SAID
CPGE BENI MELLAL
MAROC
= elfilalisaid@yahoo.fr =

ÉTUDES DE QUELQUES CIRCUITS DE L'ÉLECTRONIQUE ANALOGIQUE

1 ère partie : ÉTUDE DE FILTRES PASSIFS

1.1 Modélisation linéaire d'un circuit

1.1.1 Modèle de Norton



Les caractéristiques du modèle de Norton :

▶ $i_N = \dfrac{e}{R_g}$

▶ $R_N = R_g$

1.1.2 Détermination, à l'instant $t = 0$

• $e(t < 0) = E$

• $i(t = 0^-) = 0$

• $u_R(t = 0^-) = Ri(t = 0^-) = 0$

• $u_c(t = 0^-) = E = e(t = 0^-)$ d'après la continuité de la tension aux bornes du condensateur.

1.1.3 L'équation différentielle régissant l'évolution ultérieure de $i(t)$

D'après la loi des mailles on a : $(R_g + R)i(t) + u_c(t) = 0$ en dérivant et en remplaçant $\dfrac{du_c}{dt} = \dfrac{1}{C}i(t)$ on obtient :

$$\boxed{\frac{di}{dt} + \frac{1}{(R_g + R)C}i = 0}$$

La constante du temps

$$\boxed{\tau = (R_g + R)C}$$

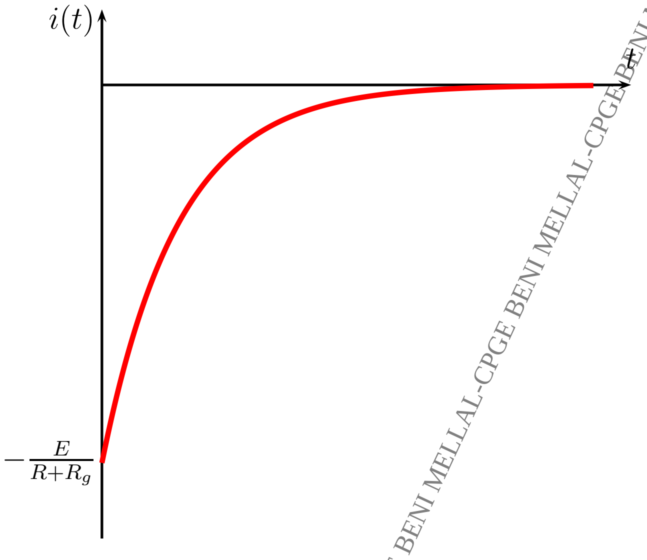
1.1.4 L'expression de l'intensité de courant i à l'instant $t = 0^+$
D'après la loi des maille précédente on tire que

$$\boxed{i(t = 0^+) = -\frac{u_c(t = 0^+)}{R + R_g} \Longrightarrow i(t = 0^+) = -\frac{E}{R + R_g}}$$

1.1.5 L'expression de $i(t)$: La résolution de l'équation différentielle en tenant compte de la condition initiale; on obtient

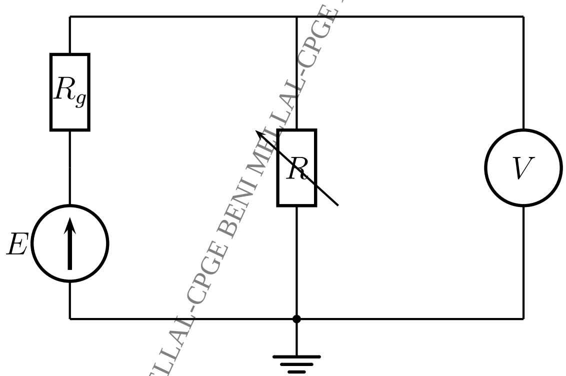
$$\boxed{i(t) = -\frac{E}{R + R_g}\mathbf{e}^{-t/\tau}}$$

Représentation graphique :



1.2 Utilisation de générateur et d'oscilloscope

1.2.1 Le protocole expérimentale : On réalise le montage suivant



• Pour mesurer E on enlève la résistance variable ce qui donne : $V = RgI + E$ est puisque le courant est nul ($R_V \to \infty$) alors

$$\boxed{E = V}$$

• Pour mesurer R_g on utilise la méthode demi-tension ; Comme $V = \frac{R}{R+R_g}E$ On fait varier R jusqu'à avoir $V = \frac{E}{2}$ dans ces conditions on a :

$$\boxed{R_g = R}$$

1.2.2 L'impédance du circuit :

On a $\underline{Z} = R + \frac{1}{jC\omega} \Longrightarrow Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}$
L'impédance minimale est $Z(\omega \to \infty)$ donc

$$\boxed{Z'_m = R}$$

• Pour $R_g = 50\,\Omega$ le GBF est idéal si $R_g \ll R$ Souvent on prend $R \simeq k\Omega$

1.2.3 GBF idéal :

$\underline{H} = \frac{\underline{Z}_c}{R + \underline{Z}_c}$ ce qui donne

$$\boxed{\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega}}$$

C'est un filtre passif passe bas d'ordre 1.

• Définition de la pulsation de coupure ω_c est telle que

$$\boxed{H(\omega_c) = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \mathbf{G}_{dB}(\omega_c) = \mathbf{G}_{max} - 3dB}$$

Avec $H = |\underline{H}|$ et $\mathbf{G}_{dB} = 20 \log H$

• $\omega_c = \frac{1}{RC}$

1.2.4 Comportement intégrateur :

On a $\underline{H} = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_c}$
En H.F on a : $\omega \gg \omega_c$ ce qui donne $\underline{H} \simeq \frac{\omega_c}{j\omega} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$ ce qui donne :

$$\boxed{\underline{s} = \omega_c \frac{1}{j\omega}\underline{e} \Longrightarrow s(t) = \frac{1}{RC}\int e(t)\,dt}$$

Donc intégrateur

1.2.5

1.2.5.1 Le gain en tension à basse fréquence du circuit :

Comme le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert en BF alors

$$\boxed{H_o = \frac{R_o}{R_o + R}}$$

1.2.5.2

• L'expression de l'admittance complexe :

$$\boxed{\underline{Y} = j(C + C_o)\omega + \frac{1}{R} \Longrightarrow \underline{Y} = \frac{1 + jR(C + C_o)\omega}{R}}$$

• L'expression de la nouvelle fonction de transfert :

$$\boxed{\underline{H}' = \frac{\underline{Z}}{R + \underline{Z}} \Longrightarrow \underline{H}' = \frac{1}{1 + R\underline{Y}}}$$

ce qui donne

$$\boxed{\underline{H}' = \frac{\frac{R_o}{R_o+R}}{1 + j\frac{RR_o}{R+R_o}(C + C_o)\omega} = \frac{H_o}{1 + j\frac{\omega}{\omega'_c}}}$$

C'est un filtre passe-bas du premier ordre de fréquence de coupure

$$\boxed{\omega'_c = \frac{R + R_o}{RR_o(C + C_o)}}$$

et de gain statique $H_o = \dfrac{R_o}{R_o + R}$

1.2.5.3 Pas d'influence de l'oscilloscope si :

• $H_o \simeq 1 \Longrightarrow R \ll R_o$

• $\omega'_c \simeq \omega_c \Longrightarrow C \gg C_o$

Donc il faut que

$$\boxed{R \ll R_o \qquad \text{et} \qquad C \gg C_o}$$

1.3 Étude d'un filtre du second ordre : filtre de Wien

1.3.1 L'expression de la fonction de transfert :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{1/3}{1 + \frac{j}{3}\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}}$$

• amplification maximale $H_o = 1/3$

• Facteur de qualité $Q = 1/3$

• la pulsation de propre $\omega_o = \dfrac{1}{RC}$

1.3.2 Le diagramme de Bode :

▶ Gain : ‘$\mathbf{G}_{dB} = 20\log|\underline{H}| \Longrightarrow \mathbf{G}_{dB} = 20\log H$

• En B.F

$$\boxed{\omega \ll \omega_o \Longrightarrow \mathbf{G}_{dB}(B.F) \simeq 20\log\frac{\omega}{\omega_o}}$$

C'est une droite de pente +20 dB/décade

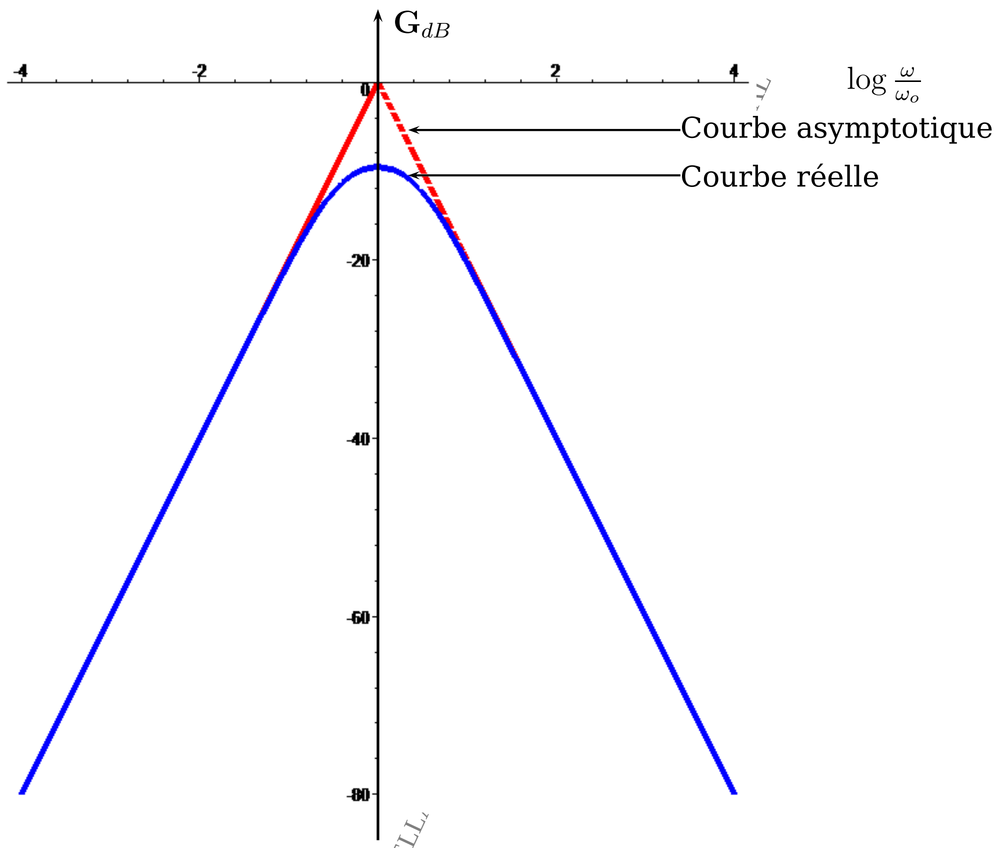
• En H.F

$$\boxed{\omega \gg \omega_o \Longrightarrow \mathbf{G}_{dB}(H.F) \simeq -20\log\frac{\omega}{\omega_o}}$$

C'est une droite de pente -20 dB/décade

• Pour $\omega = \omega_o \Longrightarrow H = H_o$ donc

$$\boxed{\mathbf{G}_{dB}(\omega=\omega_o) = 20\log H_o \xrightarrow{\text{A.N}} \mathbf{G}_{dB}(\omega=\omega_o) = -9,5}$$



► Phase : en posant $x = \frac{\omega}{\omega_o}$ la pulsation réduite

• En B.F :

$$\boxed{\underline{H} = jx \Longrightarrow \varphi(B.F) \to \frac{\pi}{2}}$$

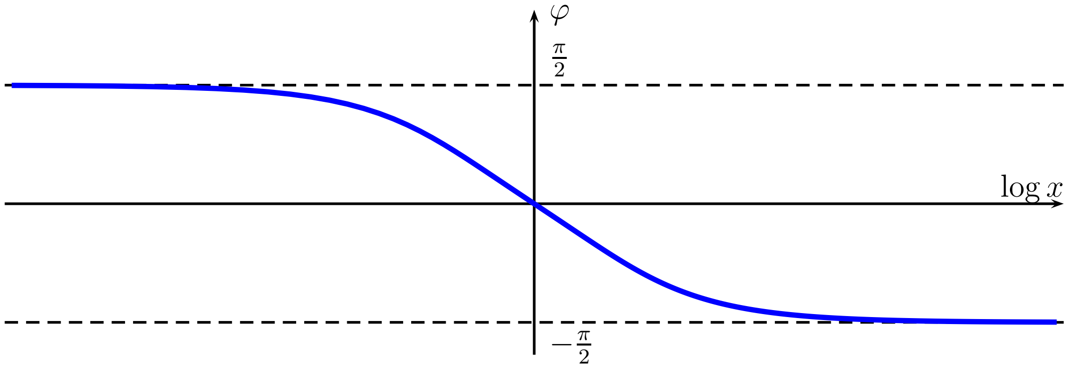
• En H.F :

$$\boxed{\underline{H} = -j/x \Longrightarrow \varphi(H.F) \to -\frac{\pi}{2}}$$

• En

$$\boxed{x = 1 \Longrightarrow \varphi(x=1) = 0}$$

Représentation graphique



C'est un filtre passe-bande (d'ordre2)

1.3.3 L'équation différentielle

On a : $\underline{H} = \dfrac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} = H_o \dfrac{jx/Q}{1 - x^2 + jx/Q}$ donc

$$\boxed{\frac{d^2V_2}{dt^2} + 3\omega_o \frac{dV_2}{dt} + \omega_o^2 V_2 = \omega_o \frac{dV_1}{dt}}$$

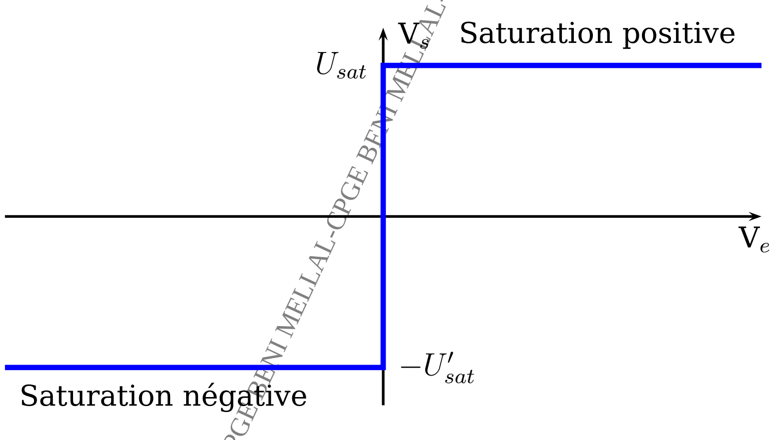
Avec

$$\omega_o = \frac{1}{RC} \qquad et \qquad a = 3$$

2 $\underline{\underline{ème}}$ partie : ÉTUDE D'UN MONTAGE A BASE D AMPLIFICATEUR OPERATIONNEL

2.1 Modèle de l'amplificateur opérationnel

2.1.1 Caractéristique de l'amplificateur opérationnel idéal



2.1.2 Les domaines :

- saturation positive :$V_s = U_{sat}$
- saturation négative :$V_s = -U'_{sat}$

2.1.3 La résistance d'entrée : puisque L'amplificateur opérationnel est idéal alors

$$i_e = 0 \Longrightarrow R_e \to +\infty$$

2.1.4 Montrons qu'en régime linéaire que $V_s = AV_e$

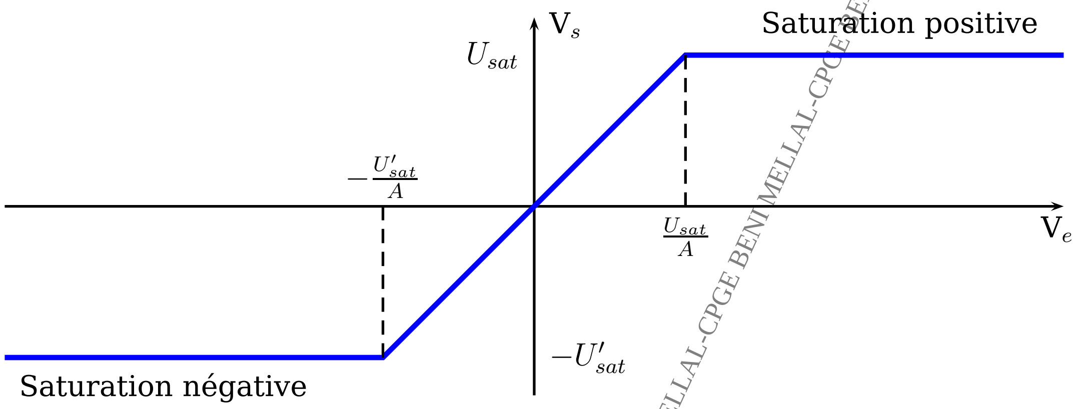
On a : $u_e = V_- = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} u_s$ donc

$$\boxed{u_s(t) = (1 + \frac{R_2}{R_1})u_e(t) \Longrightarrow A = 1 + \frac{R_2}{R_1}}$$

2.1.5 Domaine de linéarité :

$$\boxed{-U'_{sat} \leqslant u_s(t) \leqslant U_{sat} \Longrightarrow -\frac{U'_{sat}}{A} \leqslant u_e(t) \leqslant \frac{U_{sat}}{A}}$$

2.1.6 représentation de $u_s = f(u_e)$

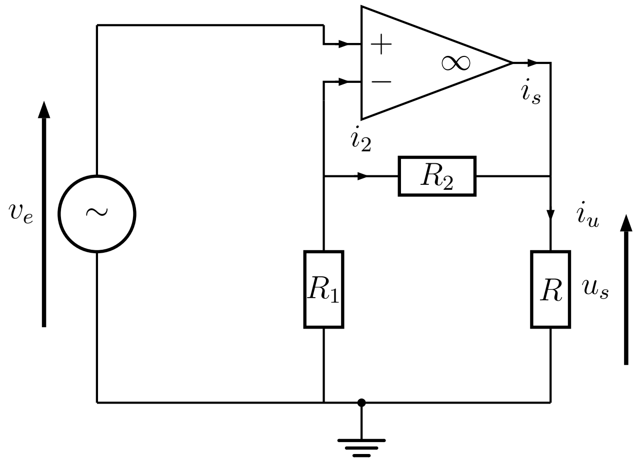


2.2 Limites au fonctionnement de L'amplificateur opérationnel idéal

2.2.1 Expérimentalement on mesure U_{sat} et $-U'_{sat}$ en choisissant la tension d'entrée $u_e(t)$ alternative (sinusoidal, triangulaire ou carrée) de faible fréquence (de l'ordre de 1kHz) afin de travailler en régime linéaire puis on augmente l'amplitude du signal d'entrée jusqu'à écretage du signal de sortie.

L'écretage se fait pour les valeurs positives en U_{sat} et pour les valeurs négatives en $-U'_{sat}$

2.2.2 La valeur de R_u pour garder un régime linéaire.



On a : $i_u = i_2 + i_s \Longrightarrow \dfrac{u_e - u_s}{R_2} + i_s = \dfrac{u_s}{R_u}$ ce qui donne

$$\boxed{i_s = \frac{Au_e}{R_u} - \frac{u_e(1-A)}{R_2} \leqslant i_{s,max} \Longrightarrow R_u \geqslant 579\ \Omega}$$

Remarque: Pour $U_o = 1V \Longrightarrow U_s = 11\ V$ on a pas de limitation en tension.

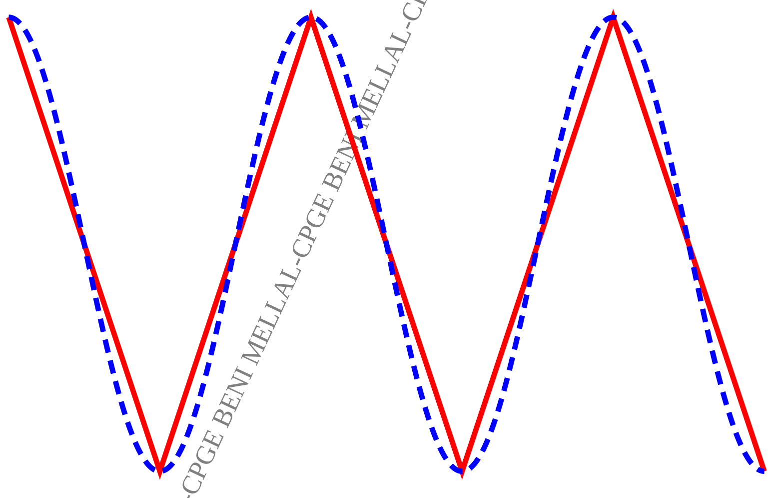
2.2.3 La valeur de ω_1

$$\left|\frac{du_s(t)}{dt}\right| < \sigma \Longrightarrow AU_o\omega < \sigma$$

donc

$$\boxed{\omega < \omega_1 = \frac{\sigma}{AU_o} \xrightarrow{\text{A.N}} \omega_1 \simeq 91; 10^3\ rad.s^{-1}}$$

▶ La déformation du signal devient triangulaire et ne reste plus sinusoidal.



On peut estimer la valeur de σ qui représente la valeur absolue de la pente de la courbe sur une demi-période

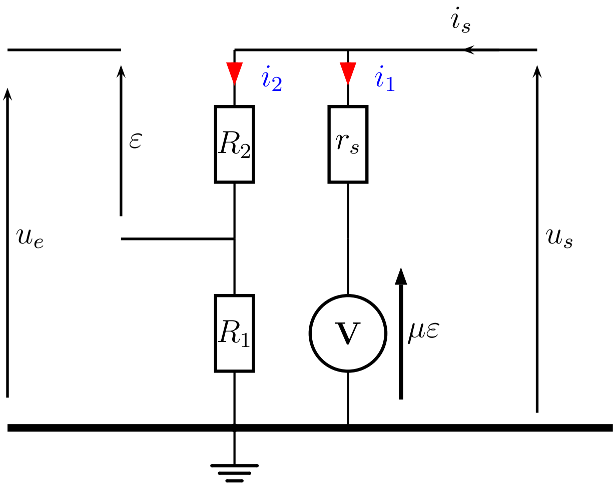
$$\boxed{\sigma = \frac{U_s(c-c)}{T/2} \Longrightarrow \sigma = 2fU_s(c-c)}$$

2.3 Influence de quelques défauts de l'amplificateur opérationnel réel

2.3.1 Ordre de grandeurs

r_d	r_s	μ
$\approx M\Omega(10^6 - 10^{12}\Omega)$	$\approx \Omega(50 - 200\Omega)$	$\approx 10^5$ à 10^6

2.3.2 Schéma équivalent :



► Définition de la résistance de sortie R_s

Définition La résistance de sortie

$$R_s = \left.\frac{u_s}{i_s}\right|_{u_e=0}$$

On a : $i_s = i_1 + i_2 \Longrightarrow i_s = \dfrac{u_s - \mu\varepsilon}{r_s} + \dfrac{u_s}{R_1 + R_2}$

Et comme $u_e = \varepsilon + R_1 i_2 \Longrightarrow \varepsilon = -R_1 \dfrac{u_s}{R_1 + R_2}$

ce qui donne

$$\boxed{R_s = \frac{r_s(R_1 + R_2)}{(\mu + 1)R_1 + R_2 + r_s}}$$

2.3.3

2.3.3.1 Nom du modèle : Modèle du premier ordre ou approximation en un pôle

2.3.3.2 La nouvelle fonction de transfert du montage :

D'après le schéma équivalent on a :

$u_e = \varepsilon + \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} u_s$ ainsi $u_s = \mu\varepsilon$ ainsi $\underline{H} = \dfrac{\mu A}{\mu + A}$

Ce qui donne : $u_e = (\frac{1}{A} + \frac{1}{\mu})u_s \Longrightarrow u_e = \frac{\mu + A}{\mu A}u_s$ donc

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\mu A}{\mu + A} \Longrightarrow \underline{H} = \frac{\mu_o A}{(\mu_o + A)\left[1 + j\frac{A_o}{A + \mu_o}\frac{f}{f_c}\right]}}$$

Ce qui donne

$$\boxed{H_o = \frac{\mu_o A}{\mu_o + A}}$$

Ainsi

$$\boxed{f_o = \frac{\mu_o + A}{A} f_c \Longrightarrow f_o = \left(1 + \frac{\mu_o}{A}\right) f_c}$$

2.3.3.3

▶ **Application numérique**

$$\boxed{H_o = \frac{10^5 \times 11}{10^5 + 11} \simeq 11 = A \qquad ; \qquad f_o = (1 + 10^5/11) \times 10 \simeq 10^5\ Hz}$$

▶ **Diagramme de BODE** :

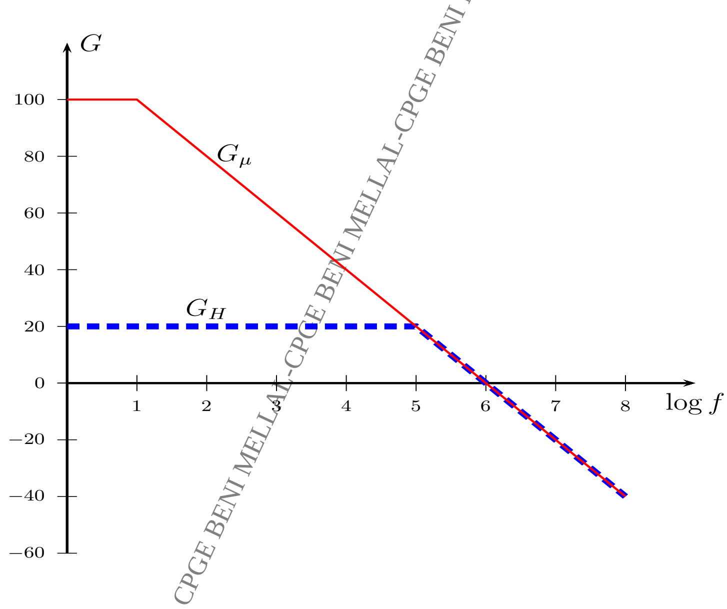
• Pour μ :

$$\boxed{\mu = \frac{10^5}{\sqrt{1 + (f/10)^2}} \Longrightarrow G_\mu = 20\log 10^5 - 10\log(1 + (f/10)^2)}$$

• Pour H :

$$\boxed{H = \frac{11}{\sqrt{1 + (f/10^5)^2}} \Longrightarrow G_H \simeq 20 - 10\log(1 + (f/10^5)^2)}$$

Représentation graphique



Remarque

L'amplificateur opérationnel est un filtre pase-bas d'ordre 1, si on augmente la bande passante on diminue le gain,puisque le produit Gain-bande passante est constant.

Les limitations observées dans le montage de la figure (4) (amplificateur non inverseur) sont dues à l'amplificateur opérationnel dont la modélisation pat $\mu = \mu_o$ n'est pas valable en haute fréquence ($f > f_c$)

3 ème partie : ÉTUDE D'UN MONTAGE OSCILLATEUR

3.1 ÉTUDE DU DÉMARRAGE DES OSCILLATIONS

3.1.1 On a $u_s = V_1$ et $u_e = V_2$ donc (1) donne

$$\frac{d^2V_2}{dt^2} + a\omega_o\frac{dV_2}{dt} + \omega_o^2 V_2 = \omega_o\frac{dV_1}{dt}$$

Puisque $i_+ = 0$ alors validité de l'équation (1).

3.1.2 Montrons l'équation différentielle :

Remplaçons u_s par V_1 et u_e par V_2 ainsi $u_e = \frac{u_s}{A}$ ce qui donne

$$\boxed{\frac{d^2u_s}{dt^2} + \omega_o(a - A)\frac{du_s}{dt} + \omega_o^2 u_s = 0}$$

Avec $a = 3$ on a :

$$\boxed{m = \frac{3 - A}{2}}$$

Relation valable si

$$\boxed{u_s \leqslant U_{sat}}$$

3.1.3 Pour

$$\boxed{m \leqslant 0 \Longrightarrow A \geqslant 3 = A_o}$$

Le montage peut générer des oscillations puisque le discriminant de l'équation différentielle est négative donc

$$\boxed{u_s(t) = K\exp(-m\omega_o t)\cos(\omega_o\sqrt{1 - m^2}t + \varphi)}$$

K et φ sont deux constantes d'intégrations.

La solution est exponentielle divergente limitée par la saturation.

3.1.4 Pour $A = A_o = 3 \Longrightarrow m = 0$ ce qui donne

$$\boxed{(2) \Longrightarrow \frac{d^2u_s}{dt^2} + \omega_o^2 u_s = 0}$$

équation différentielle dont la solution est sinusoidale de pulsation propre ω_o et de fréquence propre

$$\boxed{f_o = \frac{\omega_o}{2\pi} \Longrightarrow f_o = \frac{1}{2\pi RC}}$$

3.1.5 Réglage de la valeur de A

On a : $A = 1 + \frac{R_2}{R_1}$ on peut modifier A par variation de R_2 ou R_1 et puisque $R_1 = 1k\Omega$ fixe donc on modifie R_2

pour $R_2 \geqslant 2k\Omega \Longrightarrow A \geqslant A_o = 3$ c'est à dire $m \leqslant 0$ solution exponentielle divergente limitée par la saturation.

3.1.6 on ne peut pas régler l'amplitude puisqu'elle est limitée par la saturation.

3.2 MONTAGE AVEC CONTRÔLE AUTOMATIQUE DU GAIN

3.2.1 Étude du détecteur de crête

3.2.1.1- La relation entre les tensions $v_s(t)$ et $v_d(t)$

Soit u la tension aux bornes de la diode en convention récepteur; et d'après la loi des mailles on a :

$$\boxed{u_s + u = v_d \quad \xrightarrow{u=0} \quad v_d(t) = u_s(t)}$$

3.2.1.2- L'impédance complexe $\underline{Z}$

La résistance et le condensateur sont en parallèle donc :

$$\boxed{\underline{Z} = R//C \Longrightarrow \underline{Z} = \frac{R_d}{1 + jR_dC_d\Omega}}$$

3.2.1.3- L'expression de l'amplitude complexe du courant : En notation complexe $\underline{I}_m = I_m e^{j\varphi} = -\frac{U_s}{\underline{Z}} \Longrightarrow \underline{I}_m = -\frac{U_s}{\underline{Z}}(1 + jR_dC_d\Omega)$.

▶ L'amplitude I_m

$$\boxed{I_m = \frac{U_s}{R_d}\sqrt{1 + (R_dC_d\Omega)^2}}$$

▶ La phase

$$\boxed{\phi = \arg(-\frac{U_s}{R_d}) + \arg(1 + jR_dC_d\Omega) \Longrightarrow \phi = \pi + \arctan(R_dC_d\Omega)[2\pi]}$$

Puisque $\Re(1 + jR_dC_d\Omega) > 0$

▶ **Simplification:**

En tenant compte de $R_dC_d\Omega \gg 1$ on a $\underline{I}_m = -jU_sC_d\Omega$ donc

$$\boxed{I_m = U_sC_d\Omega \qquad et \qquad \phi = -\frac{\pi}{2}}$$

Conclusion

$$R_dC_d\Omega \gg 1 \Longrightarrow i(t) = I_m\cos(\Omega t - \frac{\pi}{2}) = I_m\sin(\Omega t)$$

3.2.1.4- L'expression de t_o :
Le courant $i(t)$ s'annule pour $\sin(\Omega t_o) = 0$ donc

$$\boxed{\Omega t_o = \pi \Longrightarrow t_o = \frac{\pi}{\Omega}}$$

▶ Les valeurs de $u_s(t_o)$ et $v_d(t_o)$:

$$\boxed{u_s(t_o) = U_s \cos(\Omega \frac{\pi}{\Omega}) \Longrightarrow u_s(t_o) = -U_s = v_d(t_o)}$$

3.2.1.5- Pour $t > t_o^+$ le courant tend à devenir négatif et par conséquent la tension aux bornes de la diode devient négative , d'où la diode est bloquée.

3.2.1.6- L'équation différentielle vérifiée par $v_d(t > t_o)$: Comme la diode est bloquée donc le condensateur se décharge à travers R_d d'où :
$R_d i(t) = v_d$ et comme $i(t) = -C_d \dfrac{dv_d}{dt}$ alors

$$\boxed{\frac{dv_d}{dt} + \frac{1}{\tau} v_d = 0 \qquad Avec \qquad \tau = R_d C_d}$$

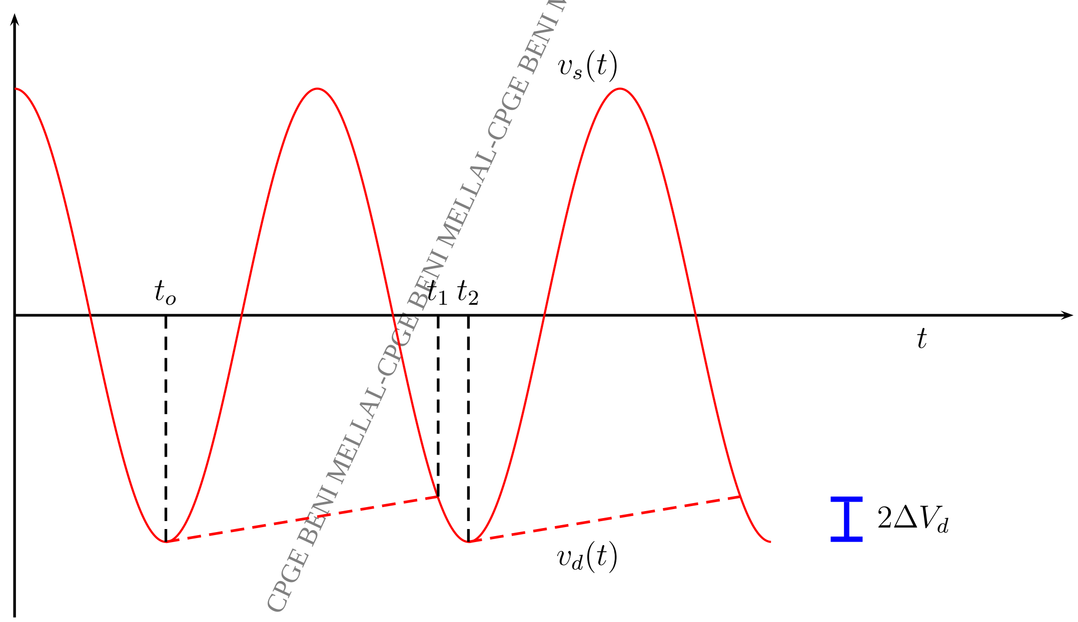
3.2.1.7- L'expression de $v_d(t)$
Sachant que la solution de cette equation différentielle est $Ae^{-t/\tau}$ et que $v_d(t_o) = -U_s$ alors

$$\boxed{v_d(t) = -U_s e^{-\frac{t-t_o}{\tau}}}$$

3.2.1.8- L'inégalité : Pour que la diode reste bloquée il faut que

$$\boxed{u = v_d(t) - v_s t) < 0 \Longrightarrow v_d(t) < v_s(t)}$$

3.2.1.9- L'allure de $v_d(t)$ et $v_s(t)$:
Remarquons que $R_d C_d \Omega \gg 1 \Longrightarrow \tau \gg T$ donc la décharge du condensateur est trop lente (la courbe exponentielle tend vers une droite $e^x \simeq 1 + x$)



- $]t_o, t_1[\Longrightarrow$ la diode est bloquée.
- $]t_1, t_2[\Longrightarrow$ la diode est passante.

3.2.2 Étude de la tension $\mathrm{v_d(t)}$

3.2.2.1- L'amplitude du signal $v_d(t)$:
On a : $2\Delta V_d = v_d(T - t_o) - v_d(t_o)$ et en utilisant vue que $R_dC_d\Omega \gg 1$ l'expression approchée de $v_d(t)$

$$\boxed{v_d(t) \simeq U_s(1 - \frac{t - t_o}{\tau}) \Longrightarrow \Delta V_d = \frac{U_s T}{2\tau} = \frac{\pi U_s}{R_d C_d \Omega}}$$

3.2.2.2- Puisque la décharge est trop lente alors $v_d(t)$ n'a pas le temps de varier et reste quasi constante en $-U_s$ ainsi $\Delta V_d = \dfrac{\pi U_s}{R_d C_d \Omega} \ll U_s = |V_d|$

3.2.2.3- Puisque la tension $u_s(t)$ vérifiée l'équation (2) alors la solution ne peut être sinusoïdale que pour $A = A_o = 3$ et $\Omega = \omega_o$

3.2.3 Contrôle automatique du gain

3.2.3.1- Si U_s augmente alors U_e augmente aussi puisque $u_e(t)$ tension de sortie du filtre de Wien dont $u_s(t)$ constitue l'entrée.

3.2.3.2- L'expression de A :
Il suffit de remplacer R_1 par $R_1 + R_{DS}$ dans l'expression précédente du gain ce qui donne

$$\boxed{A = 1 + \frac{R_2}{R_1 + R_{DS}}}$$

3.2.3.3- On a : $V_{GS} = -U_s$ donc

$$\boxed{R_{DS} = \frac{R_o}{1 - \dfrac{U_s}{V_p}}}$$

Si U_s augmente alors la résistance R_{DS} augmente et par conséquent le gain A diminue.
Conclusion : Une augmentation de U_s provoque une augmentation de U_e et une diminution du gain ; la diminution du gain à un effet rétroactif sur U_s (tend à diminuer U_s) ceci permet de réaliser un contrôle automatique du gain A

3.2.4 Application numérique

3.2.4.1-
- La résistance R_{DS}

$$\boxed{A = A_o = 3 \Longrightarrow R_{DS} = \frac{R_2 - 2R_1}{2} \xrightarrow{\text{A.N}} R_{DS} = 600\ \Omega}$$

▶ La tension U_s

$$\boxed{R_{DS} = \frac{R_o}{1 - \frac{U_s}{V_p}} = 600\Omega \Longrightarrow U_s = 2\ V}$$

3.2.4.2- Le facteur k

$$\boxed{k = -\frac{V_{GS}}{U_s} \Longrightarrow k = \frac{1}{5} = 0,2}$$